Introduction aux équations différentielles stochastiques

Boris Nectoux (boris.nectoux@uca.fr)

Présentation. De nombreux modèles en science (physique statistique, biologie, finance...) sont décrits par une équation différentielle stochastique. Par exemple, l'équation différentielle stochastique dite de Langevin,

$$dX_t = -\nabla f(X_t)dt + \sqrt{h}\, dB_t,$$

où $h > 0$, $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Ce sont des équations qui décrivent une équation différentielle ordinaire ($dx_t = -\nabla f(x_t)dt$) perturbée par une variable aléatoire (ici un bruit, i.e. un brownien $\sqrt{h}\, dB_t$). La solution résultante $(X_t)_{t\geq 0}$ n'est plus déterministe mais est aléatoire (en particulier X_t est une variable aléatoire).

Sous de bonnes hypothèses sur f, la loi du processus X_t converge en temps long vers la mesure de Gibbs:

$$\mu(dx) = \frac{e^{-\frac{2}{h}f(x)}}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{2}{h}f}}\, dx.$$

C'est-à-dire, pour tout ouvert A de $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{P}[X_t \in A] \to \mu(A) \text{ quand } t \to +\infty. \tag{1}$$

Objectifs. Nous introduirons la construction des équations différentielles stochastiques. Ensuite, nous donnerons quelques outils probabilistes, qui en un sens généralisent ceux des équations différentielles ordinaires, pour étudier le comportement en temps long de la loi de X_t et prouver (1). Enfin, on pourra vérifier numériquement la convergence (1) sur des exemples.

Littérature.

Bernt Oksendal, *Stochastic Differential Equations.* 2013, Universitext, Springer.

Meyn, Sean P and Tweedie, Richard L, *Markov chains and stochastic stability.* 2012, Springer Science & Business Media.

Hairer, Martin and Mattingly, Jonathan C, *Yet another look at Harris' ergodic theorem for Markov chains.* 109-117, 2011, Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI, Springer.